

Численное моделирование нестационарного процесса сопряженного теплообмена между горным массивом и рудничным воздухом с использованием технологии NVIDIA CUDA

Куцев Александр Равильевич

Магистр 1 года направления «Прикладная математика и информатика»
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Ученая степень: Бакалавр «Прикладной математики и информатики»

Аннотация:

Существующие модели теплообмена между рудничным воздухом и горным массивом являются чрезмерно упрощенными и не учитывают ряда существенных физических процессов в горных выработках. Основным их недостатком является отсутствие сопряженности в расчете температурных полей массива и воздуха, когда температурное поле в массиве считается неизменным. В рамках данной работы моделируется сопряженный теплообмен путем решения более полных уравнений теплообмена.

Решение данной задачи позволит осуществлять прогноз теплового режима глубоких рудников и разрабатывать эффективные мероприятия по нормализации микроклимата в рабочих зонах подземных горных выработок.

В качестве расчетной области берется горная выработка цилиндрической формы, при этом задача считается осесимметричной. Для каждой из сред численно решается нестационарное уравнение теплопроводности, которые согласовываются посредством граничного условия Ньютона для теплового потока. Результаты расчета представляются в виде эпюр температур воздуха и массива в зависимости от времени. Исследуется выход системы на стационарный тепловой режим.

Ключевые слова: нестационарный процесс, NVIDIA CUDA, сопряженный теплообмен.

Интерес к исследованию теплообменных процессов в рудничной вентиляции вызван, прежде всего, их влиянием на изменение основных характеристик вентиляционного воздуха – температуры и влажности, формирующих рудничный микроклимат

В данной работе предполагается следующий подход к построению физико-математической модели теплообмена. Суть подхода заключается в постановке и решении сопряженной задачи нестационарного теплообмена двух сред. Ставится задача рассчитать численно температуру воздуха $T(z,t)$ в горизонтальной цилиндрической выработке. Задача является принципиально нестационарной, поскольку интенсивность теплообмена воздуха со стенками зависит от глубины прогрева (охлаждения) массива, которая будет тем больше, чем больше пройдет времени.

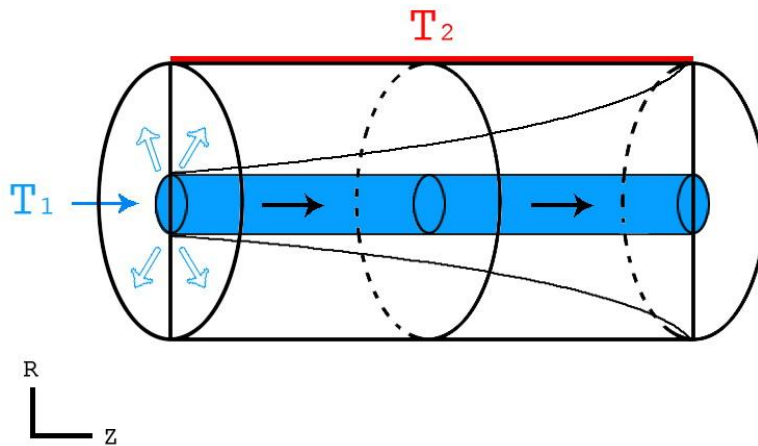


Рис 1. Цилиндрическая расчетная область для отдельной горной выработки

Помимо теплопереноса в рудничном воздухе мы должны рассматривать теплоперенос в горном массиве. В данном случае существенно не только распределение температуры вдоль выработки, но и радиальное распределение температуры вглубь горного массива (рис. 1).

Задача о теплопереносе нас интересует, прежде всего, в сетевой постановке, когда температурное поле моделируется не в отдельной выработке, а множестве выработок с учетом согласования температур и тепловых потоков в разветвлениях выработок.

Пусть по цилиндрическому каналу радиуса R_1 движется однородный однонаправленный поток газа (воздуха) с постоянной скоростью U . Толщина стенки канала $R_2 - R_1$, причем $R_2 \gg R_1$ (рис. 2). Температура газа в начальный момент времени $\tau = 0$ во всем канале равна T_1 , температура стенки в начальный момент времени равна T_2 , причем $T_2 \neq T_1$. Температура на внешней поверхности стенки канала в любой момент времени $\tau > 0$ остается постоянной и равной T_2 .

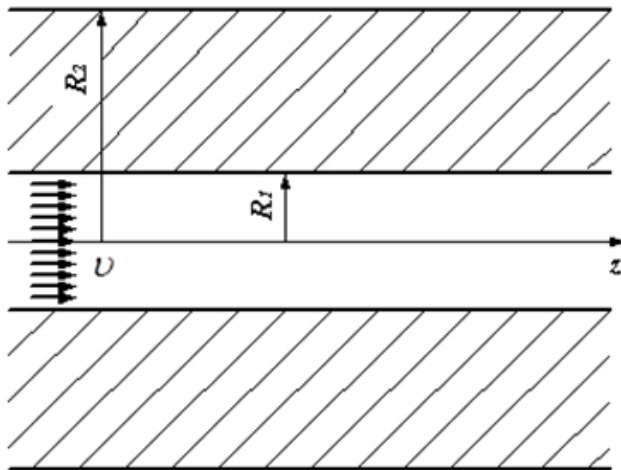


Рис 2. Схема расчетной области

С течением времени в газе и в стенке канала установится стационарное температурное поле, которое будет зависеть только от радиальной координаты r . Необходимо найти это температурное поле.

Так как расчетная область обладает осевой симметрией, задачу будем решать в цилиндрических координатах. Ось Oz цилиндрической системы координат направим по оси канала (рис. 2). Поперечными течениями в газе пренебрегаем,

тогда, так как $T = T(r, \tau)$, уравнения, описывающие изменение температуры в газе и в стенке примут вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициент температуропроводности при $r \leq R_1$

$$a = \frac{\lambda_g}{c_{pg} \rho_g}, \quad (2)$$

а при $R_1 \leq r \leq R_2$

$$a = \frac{\lambda_c}{c_c \rho_c}. \quad (3)$$

Здесь λ_g , c_{pg} и ρ_g – коэффициент теплопроводности, изобарная удельная теплоемкость и плотность газа, а λ_c , c_c и ρ_c – коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность материала стенки.

Уравнение (1) дополним начальными условиями

$$T(r, 0)|_{r \leq R_1} = T_1, \quad T(r, 0)|_{R_1 \leq r \leq R_2} = T_2, \quad (4)$$

граничным условием на оси канала (условие симметрии)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

граничным условием на внутренней поверхности стенки канала

$$\alpha_g (T_g - T_c)|_{r=R_1} = -\lambda_c \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_1}, \quad (6)$$

где T_g и T_c температуры газа и стенки и граничным условием на внешней поверхности стенки канала

$$T|_{r=R_2} = T_2. \quad (7)$$

Граничные условия (5) – (7) должны выполняться в любой момент времени τ .

Для численного решения уравнения (1) построим сетку с шагом Δr_1 по пространственной координате r в области $0 \leq r \leq R_1$, с шагом Δr_2 по пространственной координате r в области $R_1 \leq r \leq R_2$ и с шагом $\Delta \tau$ по времени (рис. 3). Причем при $r = R_1$ создается двойная точка. Координаты узлов сетки

$$r_k = (k-1)\Delta r_1, \quad k = \overline{1, N_1}, \quad (8)$$

где $\Delta r_1 = \frac{R_1}{N_1 - 1}$ относятся к газовой среде, а узлы с координатами

$$r_k = R_1 + (k - N_1 - 1)\Delta r_2, \quad k = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \quad (9)$$

где $\Delta r_2 = \frac{R_2 - R_1}{N_2 - 1}$ находятся в стенке канала.

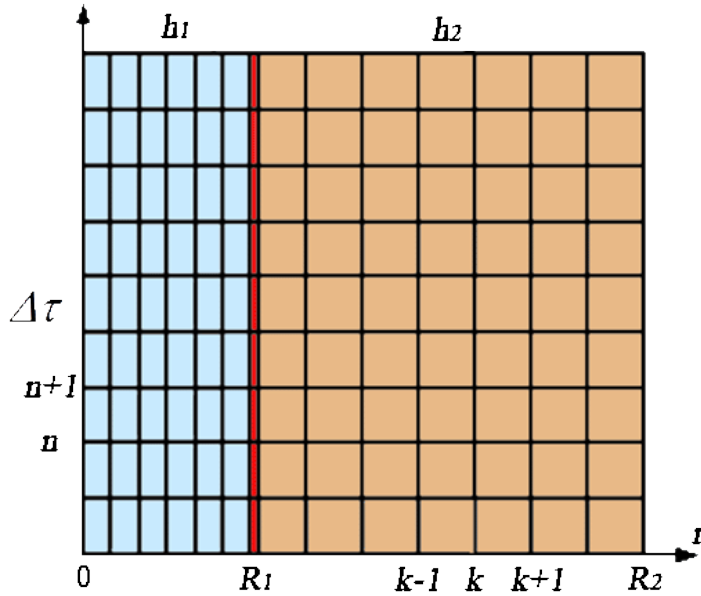


Рис 3. Разностная сетка

Значение температуры $T(r, \tau)$ в точке r_k в момент времени $n\Delta\tau$, $n=0,1,2,\dots$ будем обозначать через T_k^n , тогда конечно-разностный аналог уравнения (1) будет иметь вид

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta\tau} = a \left(\frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_k} \frac{T_{k+1}^n - T_{k-1}^n}{2\Delta r} \right). \quad (10)$$

Таким образом, уравнение, позволяющее по известным значениям температуры на n -ом временном слое определить температуру в узлах сетки на $n+1$ временном слое, будет иметь вид

$$T_k^{n+1} = T_k^n + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta r)^2} (T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n) + \frac{a\Delta\tau}{2r_k\Delta r} (T_{k+1}^n - T_{k-1}^n). \quad (11)$$

Уравнение (11) применимо только для внутренних узлов сетки, т. е. для $k = \overline{2, N_1 - 1}$ и для $k = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 - 1}$. Причем при $k = \overline{2, N_1 - 1}$ в этом уравнении $\Delta r = \Delta r_1$, r_k и коэффициент температуропроводности a вычисляются по формулам (8) и (2), а при $k = \overline{N_1 + 2, N_1 + N_2 - 1}$ в уравнении (6.4) $\Delta r = \Delta r_2$, r_k вычисляется по формуле (9), а коэффициент температуропроводности – по формуле (3).

При $k=1$ на оси симметрии, с учетом граничного условия (5), уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right).$$

Если за пределами расчетной области ввести на расстоянии Δr_1 фиктивную «нулевую» точку, то получим разностное уравнение

$$T_1^{n+1} = T_1^n + \frac{a\Delta\tau}{(\Delta r_1)^2} (T_2^n - 2T_1^n + T_0^n),$$

Из условия симметрии $T_0^n = T_2^n$, и для определения температуры в точке $k=1$ получаем

$$T_1^{n+1} = T_1^n + \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta r_1)^2} (T_2^n - T_1^n). \quad (12)$$

Для определения температуры в точках $k=N_1$ и $k=N_1+1$ запишем граничное условие (5.6) в конечно-разностном виде

$$\alpha_c (T_{N_1}^{n+1} - T_{N_1+1}^{n+1}) = -\lambda_c \frac{T_{N_1+2}^{n+1} - T_{N_1+1}^{n+1}}{\Delta r_2}. \quad (13)$$

Уравнения (13) недостаточно для определения двух неизвестных величин, поэтому поступим следующим образом. Представим значение температуры в узле сетки N_1 через разложение в ряд Тейлора в окрестности точки N_1-1

$$T_{N_1} = T_{N_1-1} + \Delta r_1 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{N_1-1} + \frac{(\Delta r_1)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)_{N_1-1}.$$

но из уравнения (1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r},$$

тогда

$$T_{N_1} = T_{N_1-1} + \Delta r_1 \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{N_1-1} + \frac{(\Delta r_1)^2}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{N_1-1},$$

Запишем полученное уравнение в конечных разностях

$$\frac{T_{N_1}^{n+1} - T_{N_1-1}^n}{\Delta \tau} = \frac{2a}{(\Delta r_1)^2} (T_{N_1}^{n+1} - T_{N_1-1}^n) + \left(\frac{a}{r_{N_1-1}} - \frac{2a}{\Delta r_1} \right) \left(\frac{T_{N_1}^{n+1} - T_{N_1-2}^{n+1}}{2\Delta r_1} \right). \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) получим

$$T_{N_1}^{n+1} = \frac{\Delta r_1 - 2r_{N_1-1}}{\Delta r_1 + 2r_{N_1-1}} T_{N_1-1}^{n+1} + \frac{2r_{N_1-1} (\Delta r_1)^2 + 4ar_{N_1-1} \Delta \tau}{a\Delta \tau (\Delta r_1 + 2r_{N_1-1})} T_{N_1-1}^{n+1} - \frac{2r_{N_1-1} (\Delta r_1)^2}{a\Delta \tau (\Delta r_1 + 2r_{N_1-1})} T_{N_1-1}^n \quad (15)$$

$$T_{N_1+1}^{n+1} = \frac{\alpha_a \Delta r_2}{\alpha_a \Delta r_2 + \lambda_c} T_{N_1}^{n+1} + \frac{\lambda_c}{\alpha_a \Delta r_2 + \lambda_c} T_{N_1+2}^{n+1}. \quad (16)$$

Для определения температуры в узле N_1+N_2 воспользуемся граничным условием (5.7)

$$T_{N_1+N_2}^{n+1} = T_2. \quad (17)$$

Для определения шага по времени $\Delta \tau$ исследуем уравнение на устойчивость методом гармоник. Представим решение разностной задачи в узле сетки в виде $T_k^n = \lambda^n e^{ik\varphi}$ и подставим в уравнение (10). Получим, что схема устойчива, при:

$$\Delta \tau \leq \min \left(\frac{(\Delta r_1)^2}{2a_c}, \frac{(\Delta r_2)^2}{2a_c} \right) \quad (18)$$

Для решения поставленной задачи была написана программа на языке С для расчета распределения температуры в стенке массива и воздухе.

В результате для следующих входных данных ($R_1, R_2, U, T_{01}, T_{02}, \lambda_c, c_{p2}, \rho_c, \lambda_c, c_c, \rho_c$), мы получили следующее графическое решение:

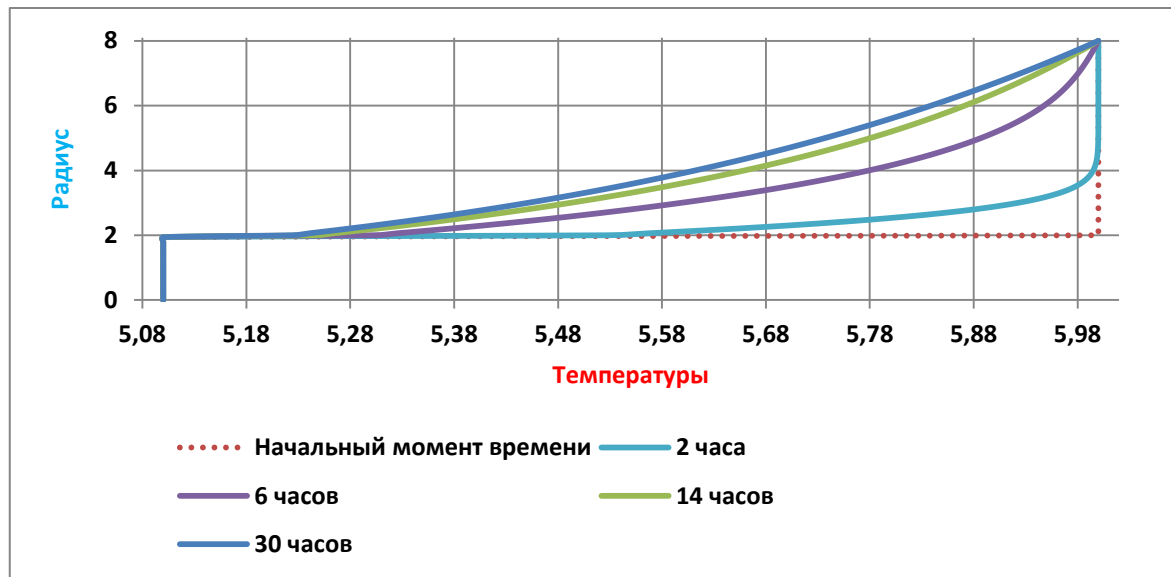


Рис. 4. График распределения температуры в цилиндрической горной выработке в зависимости от времени

Приведенные результаты (рис. 4) и результаты других расчетов показали, что температура воздуха практически не меняется по поперечному сечению канала. Поток воздуха в любом сечении канала можно считать однородным. В реальных течениях температура, скорость и давление воздуха по длине канала изменяются. Поэтому в дальнейшем будем считать поток воздуха одномерным (зависящим от продольной координаты z) нестационарным. Поле температур в массиве зависит как от времени, так и от координат r и z . Причем при каждом фиксированном z , зависимость температуры от радиальной координаты при постоянных граничных условиях стремится к стационару.

Перейдем к решению задачи в двумерной постановке:

Пусть по цилиндрическому каналу радиуса R_1 и длиной l движется однородный однонаправленный поток газа (воздуха) со скоростью $u = u_z(z, \tau)$. Толщина стенки канала $R_2 - R_1$, причем $R_2 \gg R_1$. Температура газа в начальный момент времени $\tau = 0$ во всем канале равна T_1 , температура стенки в начальный момент времени равна T_2 , причем $T_2 \neq T_1$. Температура на внешней поверхности стенки канала в любой момент времени $\tau > 0$ остается постоянной и равной T_2 .

Так как расчетная область обладает осевой симметрией, задачу будем решать в цилиндрических координатах. Ось Oz цилиндрической системы координат направим по оси канала. Поперечными течениями изменениями температуры в газе пренебрегаем, тогда, так как $T = T(z, \tau)$, уравнение, описывающие изменение температуры в газе примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(uT) = a_c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q_v}{c\rho} \quad (19)$$

Для определения объемной плотности внутренних источников теплоты Q_v выделим участок канала длиной l , пусть d – диаметр канала, тогда тепловой поток от стенки канала к воздуху будет равен

$$q = \alpha(T_{cm} - T)\pi dl$$

Эквивалентный тепловой поток от объемных источников тепла

$$q = Q_v \frac{\pi d^2}{4} l$$

Из этих равенств получаем, что в одномерной постановке

$$Q_v = \frac{2\alpha(T_{cm} - T)}{R_l}$$

Дополним уравнение (19) уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(u\rho) = 0, \quad (20)$$

уравнением движения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

и уравнением состояния

$$p = \rho RT \quad (22)$$

Здесь $R = 287 \frac{Дж}{кг \cdot K}$ – газовая постоянная воздуха, T – абсолютная температура (в K).

Изменение нестационарного поля температур в стенке $T_c = T_c(r, z, \tau)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial T_c}{\partial \tau} = a_c \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} \right) \quad (22)$$

Приведем систему уравнений (19)–(22) к безразмерному виду. В качестве обезразмеривающих параметров возьмем характерную плотность ρ^* , характерное давление p^* , характерную длину l^* , характерную температуру T^* , характерное

время $\tau^* = \frac{l^*}{u^*}$, характерную скорость $u^* = \sqrt{\frac{p^*}{\rho^*}}$. При таком выборе

обезразмеривающих параметров, уравнения (20) и (21) сохраняют свой вид. Уравнение (19) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(uT) = \bar{a}_c \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\bar{Q}_v}{\rho} \quad (23)$$

уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial T_c}{\partial \tau} = \bar{a}_c \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} \right) \quad (24)$$

а уравнение (21) примет вид

$$p = \rho \bar{R} T \quad (25)$$

Здесь $\bar{R} = \frac{\rho^* T^*}{p^*} R$ безразмерная газовая постоянная, $\bar{a}_2 = \frac{a_2}{u^* l^*}$ безразмерная температуропроводность газа, $\bar{a}_c = \frac{a_c}{u^* l^*}$ безразмерная температуропроводность стенки, $\bar{Q}_V = \frac{l^* Q_V}{T^* u^* \rho^* c_p}$ безразмерная объемная плотность внутренних источников теплоты.

При расчетах принималось $p^* = 101325 \text{ Па}$, $T^* = 273 \text{ К}$, $l^* = 2R_1$,

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*}.$$

Систему уравнений (20), (21), (24), (25) дополним начальными условиями

$$T(z, 0)|_{0 \leq z \leq l} = T_1(z),$$

$$u(z, 0)|_{0 \leq z \leq l} = u_1(z),$$

$$p(z, 0)|_{0 \leq z \leq l} = p_1(z),$$

$$Tc(r, z, 0)|_{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq l} = Tc_1(r, z),$$

и граничными условиями:

$$Tc(r, z, \tau)|_{r=R_2, 0 \leq z \leq l} = Tc_2(z, \tau),$$

$$Tc(r, 0, \tau)|_{R_1 \leq r \leq R_2} = Tc_3(r, \tau),$$

$$Tc(r, l, \tau)|_{R_1 \leq r \leq R_2} = Tc_4(r, \tau),$$

$$\alpha(T - Tc)|_{r=R_1, 0 \leq z \leq l} = \lambda \frac{\partial Tc}{\partial r}|_{r=R_1, 0 \leq z \leq l},$$

$$u(0, \tau) = u_2(\tau), \quad u(l, \tau) = u_3(\tau),$$

$$p(0, \tau) = p_2(\tau), \quad p(l, \tau) = p_3(\tau),$$

$$T(0, \tau) = T_2(\tau), \quad T(l, \tau) = T_3(\tau).$$

Исследование на устойчивость выбранной разностной схемы показала, что шаг по времени $\Delta \tau$ необходимо выбирать из следующего условия

$$\Delta \tau = \min \left(\min_j \frac{2\Delta z^2}{u_j^n \Delta z - 2a_2}, \frac{\Delta z^2 \cdot \Delta r^2}{2a_c (\Delta z^2 + \Delta r^2)} \right). \quad (26)$$

Для реализации двумерного алгоритма была выбрана программно-аппаратная архитектура NVIDIA CUDA. Вычисления проводились на суперкомпьютере «ПГУ-Тесла» - высокопроизводительном многопроцессорном вычислительном комплексе с гибридной архитектурой.

При разработке параллельных алгоритмов решения задач вычислительной математики принципиальным моментом является анализ эффективности

использования параллелизма, состоящий обычно в оценке получаемого ускорения процесса вычисления (сокращения времени решения задачи). Формирование подобных оценок ускорения может осуществляться применительно к выбранному вычислительному алгоритму.

В таблице 1, диаграмме 1 приведены результаты решения задачи на стационарном ноутбуке (Intel Dual-Core T4200), процессоре Intel Xeon 5670 (ПГУ-Тесла), на видеокарте Nvidia Tesla S2050 (непосредственный алгоритм на CUDA C, а так же последовательный код с использованием директивы OpenACC). Задача решалась на сетке 1024×1025 в области $[0, 100] \times [0, 20]$, было выполнено 50000 шагов по времени.

Устройство	Время решения	Ускорение
Intel Dual-Core T4200	34 ч. 28 мин. 11 сек.	□
Intel Xeon 5670	21 ч. 09 мин. 44 сек.	1.65x
Nvidia Tesla S2050 (OpenACC)	03 ч. 37 мин. 48 сек.	9.4x
Nvidia Tesla S2050 (CUDA C)	00 ч. 46 мин. 35 сек.	45x

Таблица 1. Результаты решения нестационарного процесса сопряженного теплообмена между горным массивом и рудничным воздухом.

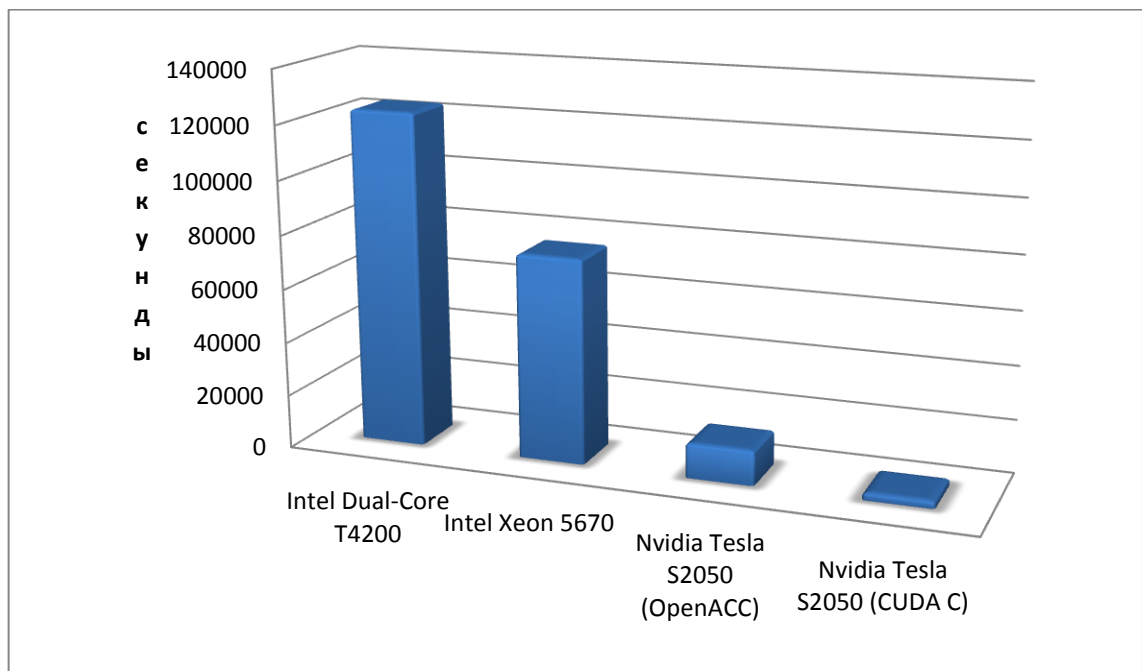
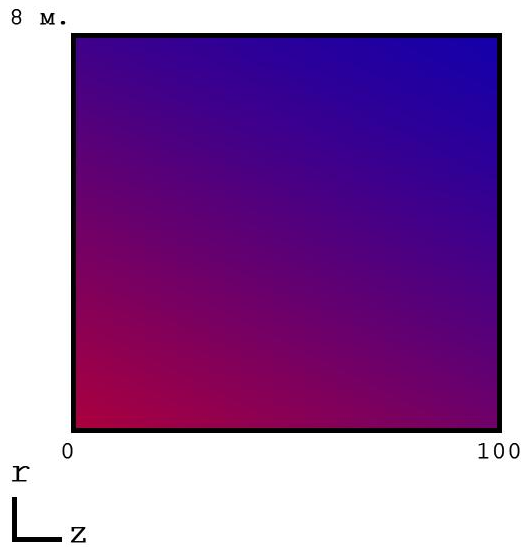


Диаграмма 1. Сравнение времени решения задачи на CPU, GPU

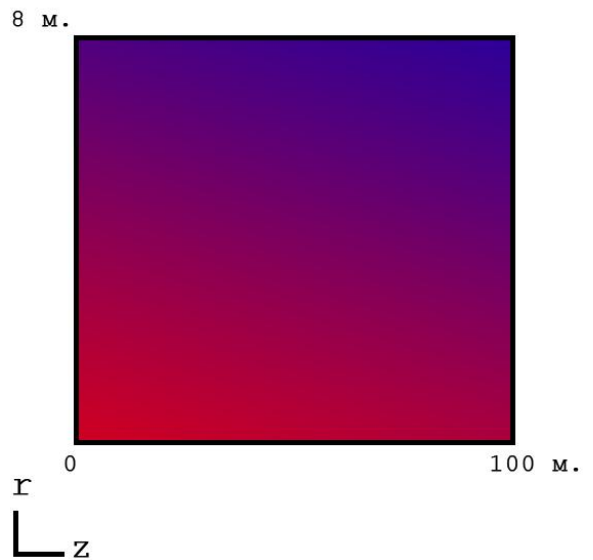
Проведены многочисленные расчеты с различными параметрами.

Для примера, приведем результаты расчета программы на сетке 1024×1025 в области $[0, 100] \times [0, 8]$.

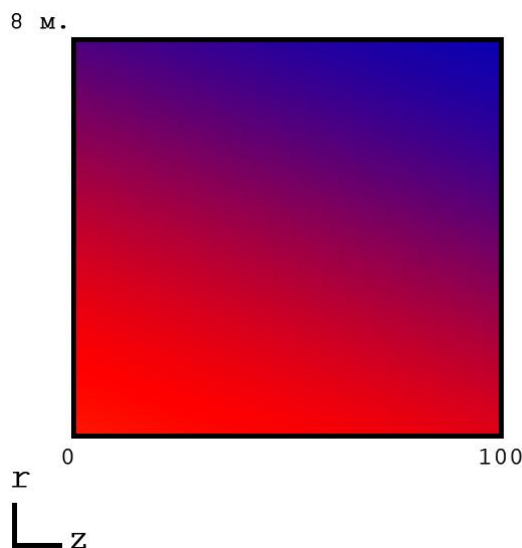
Прошло времени:
56 минут:



2 часа 57 минут:



6 часа 51 минута:



13 часов 37 минут:

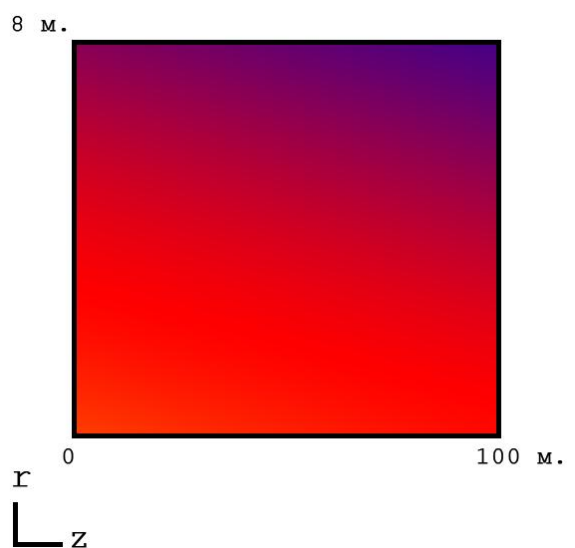


Рис.5. Распределение температуры в горном массиве.

Данная работа направлена на численное моделирование нестационарного процесса сопряженного теплообмена между горным массивом и рудничным воздухом с использованием высокопроизводительной вычислительной системы «ПГУ-Тесла» (Рис. 5).

В процессе решения поставленной задачи была реализована программа для моделирования теплопереноса в горном массиве и рудничном воздухе с применением технологии NVIDIA CUDA, а также с использованием директивы OpenACC.

Результаты работы вошли в программный комплекс «Аэросеть» Горного института УрО РАН.

Список литературы

1. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975.
2. Теплотехника: Учебник для вузов/ В.Н.Луканин, М.Г.Шатров, Г.М.Камфер и др.; Под ред. В.Н.Луканина – М.: Высшая школа, 2000.
3. Юдаев Б. Н. Теплопередача. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1973.
4. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М.: Госэнергоиздат, 1956.
5. Мак-Адамс В. Ч. Теплопередача. М.:Металлургиздат, 1961.
6. Арнольд Л. В., Михайловский Г. А., Селиверстов В. М. Техническая термодинамика и теплопередача. М.: Высш.шк., 1979.