

Джеты, регуляризация особенностей и параллельные алгоритмы для нелинейных систем с распределенными параметрами

Ахметзянов Атлас Валиевич, к.т.н.
Кушнер Алексей Гурьевич, д.ф.-м.н.
Лычагин Валентин Васильевич, д.ф.-м.н.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

Аннотация. В докладе описывается подход к разрешению сингулярностей решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на геометрии пространств джетов. Это приводит к эффективным параллельным алгоритмам для построения таких решений.

Ключевые слова: джеты, параллельные вычисления, ударные волны, нелинейная акустика, фильтрация, нефтедобыча.

Под сингулярными решениями мы понимаем либо разрывные решения типа ударных волн, либо непрерывные решения, у которых разрывны частные производные (так называемые «контактные ударные волны»).

Математический аппарат классической теории плохо приспособлен для построения сингулярных решений. Теория обобщенных функций С.Л. Соболева, традиционно применяемая для построения разрывных решений, хорошо описывает лишь линейные уравнения.

Альтернативой аппарату обобщенных функций является геометрическая теория многозначных решений [2,3]. Многозначное решение дифференциального уравнения k -го порядка представляет собой подмногообразие в пространстве k -джетов, размерность которого равна числу независимых переменных в уравнении и которое является интегральным многообразием распределения Картана [2].

В отличие от классического решения, многозначное решение, вообще говоря, не является графиком k -джета функции: проекция многозначного решения на пространство независимых переменных может иметь геометрические особенности - каустики. В случае линейных уравнений для всякому многозначному решению можно сопоставить обобщенное (в смысле Соболева) решение [4]. Таким образом, многозначные решения представляют собой естественное распространение теории обобщенных решений на нелинейные уравнения.

Описанные идеи приводят к новой методологии построения сингулярных решений дифференциальных уравнений и к построению параллельных алгоритмов для решения задач моделирования нелинейных систем с распределенными параметрами.

Например, гидродинамического моделирования процессов фильтрации флюидов в пористых средах для управления разработкой нефтяных и газовых залежей с использованием методов многоуровневой декомпозиции с расщеплением по физическим процессам (распределения давлений и нефте- или

водонасыщенностей), а также многосеточной аппроксимацией с расщеплением по пространственным координатам резервуаров нефте- или газоносных пластов [1].

Эти методы мы применили для изучения распространения звукового пучка в нелинейной среде, которое описывается уравнением Хохлова-Заболоцкой и к моделированию процессов разработки нефтяных месторождений путем вытеснения нефти растворами активных реагентов.

Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант №12-08-01238-а) и Президиумом РАН (Программа фундаментальных исследований Президиума РАН №27).

Список литературы

1. Ахметзянов А.В. Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // Автоматика и Телемеханика. 2008. № 1. С.3-15.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: "Наука". - 1986. - 336 С.
3. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Vol. 101. - Cambridge: Cambridge University Press. - 2007. - xxii+496 P.
4. Лычагин В.В. Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 20(1988). С.207–247.